View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Xiamen University Institutional Repository

利率仿射模型下的利率风险价格形式实证研究①

郑振龙[1], 柯　鸿[2], 莫天瑜[1]
(1. 厦门大学金融系, 厦门 361005; 2. 第一创业证券, 深圳 518028)

摘要: 在仿射利率期限结构动态模型(affine DTSM)框架下, 利率风险价格主要有 4种设定形式: 完全仿射模型(CAM)、实质仿射模型(EAM)、扩展仿射模型(EXAM)和半仿射模型(SAM), 经过前人理论和实证的证明, EAM 优于 CAM, EXAM 和 SAM 均优于 EAM. 然而, EXAM和 SAM 的孰优孰劣无法单从理论上的比较得出结论, 同时亦鲜有相关的实证研究对其进行比较. 因此, 文中运用卡尔曼滤波估计法, 在三因子 CIR 模型的基础上对 SAM、EXAM 和 EAM 进行实证比较, 实证结果表明 EXAM 要优于 SAM. 此外, 稳健性检验表明, EXAM 虽然已为目前最优的利率风险价格形式, 但其仍然不够完善.

关键词: 利率仿射模型; 利率风险价格形式; 扩展仿射模型; 半仿射模型
中图分类号: F830.91　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2010)09-0004-12

0　引　言

针对利率动态期限结构模型(dynamics term structure models, DTSM), 学术界和业界已经进行了许多研究、并发展出一系列模型, 例如, 仿射模型(affine DTSM)、二次高斯模型(quadratic-gaussian)、非仿射随机波动率模型(nonaffine-stochastic volatility)以及包括跳跃或机制转换的模型(jumps, regime switching)等等. 在众多模型中, 本文所关注的是目前应用最为广泛的仿射模型框架.

仿射模型对 DTSM 3个组成部分中的两个进行了限定:

1) 瞬时利率 r 被设定为状态变量 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数;

2) 风险中性测度 Q 下, 状态变量 $\boldsymbol{X}$ 的瞬时漂移率与瞬时方差被设定为 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数.

在这两个假定下, 债券价格可以方便地表示为 $P_t(t) = \exp[A(t) - \boldsymbol{B}(t)'\boldsymbol{X}_t]$, 而 $A(\tau)$、$\boldsymbol{B}(\tau)$ 则服从用数值方法十分易解的黎卡提常微分方程组(Riccati ODEs). 所以, 相比较其他 DTSM 而言, 在仿射模型框架下对利率期限结构的实证研究就变得十分易于处理, 而这也是仿射模型无论在学术界还是业界都十分受欢迎的主要原因.

对仿射模型进行实证最基本的方法, 便是利用收益率曲线的面板数据来拟合参数. 由于面板数据同时包括了利率横截面和时间序列的信息, 因此利用面板数据可以同时得到状态变量在风险中性定价测度 Q 和现实测度 P 的参数, 即, 同时得到状态变量 $\boldsymbol{X}$ 在风险中性测度 Q 和现实测度 P 的动态过程.

然而, 许多实证表明, 在传统的利率风险价格形式(例如将利率风险价格设定为瞬时波动率和一个常数的乘积)的设定下, 仿射模型无法同时准确地描述状态变量 $\boldsymbol{X}$ 在现实测度 P 和风险中性测度 Q 的动态过程, 具体表现为: 在较好地拟合其横截面利率期限结构的时候, 却无法同时对未来收益率的变动进行较好地预测; 或无法较好地拟

① 收稿日期: 2009-12-10; 修订日期: 2010-05-28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70971114); 教育部国际金融危机应对研究应急资助项目(2009JYJR051); 福建省自然科学基金资助项目(2009J01316).
作者简介: 郑振龙(1966—), 男, 福建平潭人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: zlzheng@xmu.edu.cn
© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

合期限溢价的时变性等等. 导致仿射模型出现这一问题的原因有很多, 例如, 利率风险价格设定形式不够灵活, 瞬时利率 r 或许是状态变量 $\boldsymbol{X}$ 的非线性函数, 没有考虑跳跃和机制转换这些因素, 等等. 因此, 要改进仿射模型可以从多方面入手, 而本文所关注的是利率风险价格的设定形式问题.

利率的风险价格, 是连接风险中性测度 Q 和现实测度 P 最重要的枢纽. 状态变量 $\boldsymbol{X}$ 在真实世界的动态过程, 与风险中性世界是不一样的. 例如, 在风险中性世界中, 利率动态过程的漂移率是线性的, 但是在真实世界却可能是非线性的. 再如, 两个世界中的均值回复速度或长期均值水平可能是不一样的. 风险价格形式设定不正确, 将直接导致错误估计两个测度下利率动态过程, 从而致使错误提取真实信息. 因此, 为了更准确地描述利率在风险中性测度和现实测度中的动态过程, 国外学者们已经越来越重视实证中所选择的利率风险价格设定形式, 并且发展出了更加灵活、更加合理的新一代利率风险价格设定形式.

到目前为止, 理论界主要发展了 4种利率风险价格设定形式: 完全仿射模型 (Completely Affine Model)、实质仿射模型 (Essentially Affine Model)、扩展仿射模型 (Extended Affine Model) 和半仿射模型 (Semi-Affine Model), 已经证明, 扩展仿射模型和半仿射模型是最优的两种利率风险价格形式 (Duffee[1], Duarte[2], Cheridito 等[3]). 然而, 在实证时仍然会遇到一个问题: EXAM 和 SAM 哪个更好? 目前为止尚未发现国内外有文章对这两种利率风险价格形式进行正式的比较研究, 而这正是促成本文的重要原因之一.

本文拟在三因子 CIR 模型的基础上, 利用卡尔曼滤波法对 EAM、EXAM和 SAM 进行实证比较研究.

1　仿射模型框架下的债券定价和利率风险价格发展脉络

仿射模型框架下, 瞬时利率 r_t 被设定为

$$r_t = \delta_0 + \delta_x' \boldsymbol{X}_t \tag{1}$$

其中, δ_0 是 1×1的标量; δ_x, $\boldsymbol{X}_t$ 是 $n \times 1$的向量. 而假定状态变量 $\boldsymbol{X}$ 在风险中性测度 Q 的动态过程为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = (\phi^Q - \boldsymbol{K}^Q \boldsymbol{X}_t)\,\mathrm{d}t + \Sigma\sqrt{\boldsymbol{S}_t}\,\mathrm{d}W_t^Q \tag{2}$$

$$S_t(i, i) = \alpha_i + \beta_i' \boldsymbol{X}_i,\quad S_t(i, j) = 0,$$
$$i \neq j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n \tag{3}$$

其中, W_t^Q 是风险中性测度 Q 下标准的布朗运动, ϕ^Q, α, β_i 是 $n \times 1$向量, $\boldsymbol{K}^Q$, Σ是 $n \times n$的矩阵, $\boldsymbol{S}_t$ 是 $n \times n$ 的对角矩阵.

Duffe和 Kan[4] 证明了在式 (1)、(2) 和 (3) 的假定下, 剩余期限为 τ 到期支付 1的零息票债券, 在 t时刻的价格 $P_t(\tau)$ 将服从如下形式

$$P_t(\tau) = \mathrm{E}_t^Q\left(\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r_s\,\mathrm{d}t\right)\right)$$
$$= \exp\left(A(\tau) - \boldsymbol{B}(\tau)'\boldsymbol{X}_t\right) \tag{4}$$

其中, $A(\tau)$ 是 1×1的标量, $\boldsymbol{B}(\tau)$ 是 $n \times 1$的向量, 它们都是剩余期限 τ的函数, 并服从如下的常微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A(\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= -\Psi^{Q\prime}\boldsymbol{B}(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\Sigma'\boldsymbol{B}(\tau)]_i^2\alpha_i - \delta_0 \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= -\boldsymbol{K}^{Q\prime}\boldsymbol{B}(\tau) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\Sigma'\boldsymbol{B}(\tau)]_i^2\beta_i - \delta_x \end{aligned} \tag{5}$$

由于到期支付 1的零息票债券, 在其到期时的价格 $P_t(0)$ 必须等于 1, 否则会出现无风险套利机会, 所以这一常微分方程组还必须满足边界条件: $A(0) = B(0) = 0$

需要注意的是, Duffe和 Kan[4] 在推导式 (4)、(5) 时, 并没有对状态变量 $\boldsymbol{X}$ 在现实测度 P 下的动态过程作任何的限定. 因此, 理论上不论假定状态变量 $\boldsymbol{X}$ 在现实测度下的动态过程为何种形式, 只要满足了式 (1)、(2)、(3) 的假定, 式 (4)、(5) 都能够成立. 而利率风险价格是连结现实测度和风险中性测度惟一的枢纽, 只要合理设定了利率风险价格的形式, 就能够推导出状态变量 $\boldsymbol{X}$ 在现实测度下的动态过程, 进而得到各经济变量如持有期收益率、连续复利收益率等在现实测度下的动态过程, 从而对这些经济变量进行观察预测.

虽然利率风险价格的设定形式不影响式 (4)、(5) 的推导, 但利率风险价格的设定仍需要

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

满足一系列的假设条件,例如需满足无套利假设、需尽量准确地刻画投资者对利率的风险态度、要能同时刻画利率一阶矩和二阶矩的动态变化过程等等.目前理论界主要发展了以下 4种利率风险价格设定形式.

1.1 完全仿射模型(Completely Affine Model, CAM)

Fisher和 Gilles[5] 提出了如下的风险价格形式

$$\Lambda_t = \sqrt{S_t}\lambda_1 \tag{6}$$

其中, λ_1 表示 $n \times 1$的向量.

CAM提出后,被学者们广泛使用.例如, Chen和 Scott[6]、Dai和 Singleton[7]、Jong[8]、Lamoureux 和 Witte[9] 等,以及迄今为止国内的大部分学者都使用 CAM的风险价格设定进行各类实证研究.

然而, CAM有着极大的缺陷,例如,无法描述利率风险溢酬的时变性、许多参数由现实测度和风险中性测度的动态过程共用等.

所以在用 CAM进行实证的过程中,经常会出现无法同时准确拟合利率的横截面性质和时间序列性质的问题,要么风险溢酬拟合不好而无法进行较好地预测,要么牺牲了其他参数(例如,拟合期限结构形状和定价的参数)的拟合效果来改善风险溢酬的拟合效果.

Dai和 Singleton[7] 利用 CAM对其提出的经典仿射模型(Canonical Affine Model)进行了实证研究,其结果表明 CAM很好地刻画了持有期收益率风险溢酬低均值、高方差的特性,然而横截面利率期限结构形状的拟合误差却很大.

Ahn等[10] 发现, CAM无法准确刻画利率的条件波动率的变化.

1.2 实质仿射模型(Essentially Affine Model, EAM)

Duffee[1] 在 CAM的基础之上进行改进,提出了 EAM的风险价格形式

$$\Lambda_t = \sqrt{S_t}\lambda_1 + \sqrt{S_t^-}\lambda_2 X_t \tag{7}$$

其中, λ_1 表示 $n \times 1$向量, λ_2表示 $n \times n$矩阵, S_t^- 表示 $n \times n$的对角矩阵,其对角元素为

$$S_i^-(i,i) = \begin{cases} (\alpha_i + \beta_i' X_t)^{-1}, & \text{若}(\alpha_i + \beta_i' X_t) > 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \tag{8}$$

提出 EAM的目的,主要是为了在波动率之外,引入其他因素(如斜率)来影响风险溢酬的变化,从而刻画风险溢酬均值小、方差大的特性.

然而, EAM仍然存在明显的不足之处:为了更好地刻画风险溢酬的特征,必须在一定程度上放弃利率方差的时变性特征,即模型中至少要有 1个因子服从类似 Vasicek Process.这使研究者在选择模型时会面临到底要刻画风险溢酬还是利率方差时变性的尴尬境地.

Duffee[1] 在提出 EAM后,使用 QML估计,在 Dai和 Singleton[7] 的经典仿射模型基础上对 EAM和 CAM进行了实证比较.结果表明, EAM能更好地在现实测度中预测未来收益率曲线的动态变化. 同时 Duffee[1] 也指出, 三因子 Essentially-Gaussian Model对未来收益率一阶矩的预测效果最好,但对未来利率波动率的预测效果却不如三因子 CIR模型.

Dai和 Singleton[11] 借鉴 Duffee[1] 的风险价格设定方式进行研究,也发现了同样的问题: EAM在 CIR框架下无法同时准确预测未来利率的一阶矩和二阶矩.

1.3 扩展仿射模型(Extended Affine Model, EXAM)

为了改进 EAM的缺陷, Cheridito等[3] 提出了 EXAM的风险价格形式

$$\Lambda_t = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 X_t}{\sqrt{S_t}} \tag{9}$$

其中, λ_1是 $n \times 1$向量, λ_2是 $n \times n$矩阵;同时,状态变量在风险中性测度和现实测度下的动态过程均满足 Feller条件以使得 $\sqrt{S_t}$恒大于 0.

从理论上说, EXAM比 EAM更具一般性,因为只要对参数进行 Feller条件限制,保证方差恒大于 0,则无论假设状态变量的动态过程为哪种形式(包括均方根动态过程),状态变量之间都能相互影响到对方的风险溢酬变化.并且,在 EXAM中,两个测度下的漂移项中的所有参数(包括长期均值、回复速度、状态变量之间的相关关系)都可以拥有不同的值.这就使得在实证研究时,同一个参数不用同时描述两个测度的动态过程,从而在理论上可以准确地同时刻画两个测度下的动态过程.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Cheridito等[3] 在提出 EXAM 的定义后, 在 Dai和 Singleton[7] 的 canonical仿射模型基础上, 用MLE估计比较了 EXAM、EAM和 CAM 3种风险价格的优劣, 结果发现, EXAM 确实能够在不影响利率横截面性质拟合的情况下改进利率时间序列性质的拟合.

1.4 半仿射模型 (Semi-Affine Model, SAM)

同样, 为了改进 EAM 在 CIR 模型中的应用, Duarte[2] 提出了 SAM

$$\Lambda_t = \Sigma^{-1}\lambda_0 + \sqrt{\boldsymbol{S}_t}\lambda_1 + \sqrt{\boldsymbol{S}_t^-}\lambda_2 \boldsymbol{X}_t \tag{10}$$

其中, λ_0 为 $n\times 1$向量, 其他符号与 EAM 相同.

SAM 对 EXAM 的改进体现为以下几点.

首先, 在这种设定下, 风险溢酬、现实测度下的漂移项都是状态变量的非线性函数. 这是与之前的 3种风险价格设定形式所不同的.

其次, 为了刻画风险溢酬的小均值、大方差特性, 需要风险溢酬中的各参数能够改变符号. EXAM的方法是在其中一个状态变量的风险溢酬中引入了另外一个状态变量的影响, 以使风险溢酬中的各个参数的符号可以改变; 而 SAM 则直接在风险溢酬中引入状态变量自身的均方根, 从而使得各参数符号能够改变.

Duarte[2] 在提出 SAM 后, 用 MLE 对 SAM、EAM进行了估计和比较, 发现在大多数模型中, 尤其是多因子 CIR模型, SAM 能在一定程度上改进 EAM 对收益率曲线的预测能力.

2　本文的实证研究方法

2.1　本文的实证动因

图 1给出了 4种风险价格的发展过程. 根据 Duffee[1]、Duarte[2] 以及 Cheridito等[3] 的实证可知, EXAM和 SAM 是目前为止最优的两种利率风险价格设定形式, 然而尚无法得知 EXAM 和 SAM 之间哪一种更优, 而这正是促成本文的主要原因.

本文以下将对 EXAM 和 SAM 的优劣进行实证比较, 以弥补国内外在这一块的空白, 为日后的进一步研究提供参考.

本文研究的主要方法是利用利率期限结构的面板数据, 通过卡尔曼滤波估计出 EAM、EXAM 和 SAM 在三因子 CIR 模型基础上的各个参数, 并比较 3种风险价格对期限结构横截面性质和时间序列性质的拟合以及预测能力, 以此作为风险价格优劣的评判标准.

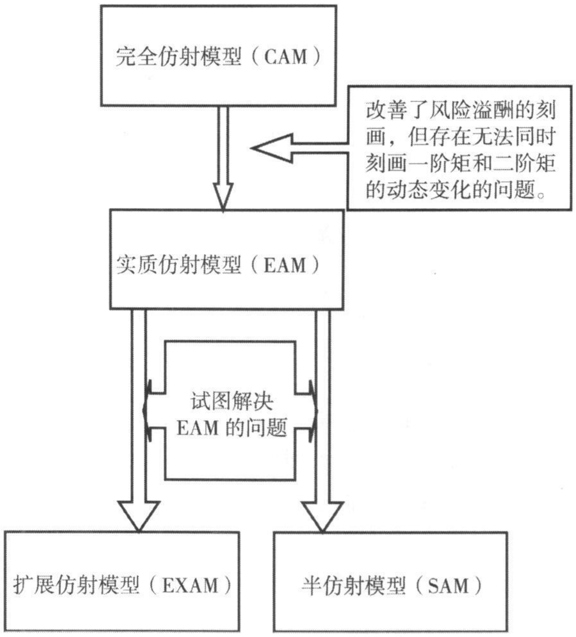

图 1　利率风险价格发展脉络图

Fig. 1 The development of interest rate risk price specifications

2.2　因子模型的选择

在 Affine DTSM 框架下, 本文选择三因子 CIR 模型作为比较风险价格优劣的基础.

在三因子 CIR模型下, 瞬时利率与状态变量的函数关系为

$$r_t = \sum_{i=1}^{3} X_{t,i}$$

而状态变量在风险中性测度下的动态过程可以写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = \left(\begin{pmatrix}\varphi_1^Q\\ \varphi_2^Q\\ \varphi_3^Q\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}k_1^Q & 0 & 0\\ 0 & k_2^Q & 0\\ 0 & 0 & k_3^Q\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_t\right)\mathrm{d}t + \begin{pmatrix}\sigma_1\sqrt{X_{t,1}} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2\sqrt{X_{t,2}} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\sqrt{X_{t,3}}\end{pmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t^Q$$

使动态过程在风险中性测度下存在惟一解所需要的参数限制是

$$\varphi_i^Q \geqslant 0,\ k_i^Q \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

此时债券价格和连续复利收益率可以表示为

$$P_t(\tau) = \exp(A(\tau) - \boldsymbol{B}(\tau)'\boldsymbol{X}_t)$$

$$R_t(\tau) = -\frac{A(\tau)}{\tau} + \left(\frac{\boldsymbol{B}(\tau)}{\tau}\right)'\boldsymbol{X}_t$$

其中

$$A(\tau) = \sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{2\varphi_i^Q}{\sigma_i^2}\left[\ln(2\gamma_i) + \frac{1}{2}(k_i^Q - \gamma_i)\tau - \ln\left((\gamma_i + k_i^Q)(1 - e^{(-\gamma_i\tau)}) + 2\gamma_i e^{(-\gamma_i\tau)}\right)\right]\right\}$$

$$\boldsymbol{B}(\tau)_i = \frac{2(1 - e^{(-\gamma_i\tau)})}{(\gamma_i + k_i^Q)(1 - e^{(-\gamma_i\tau)}) + 2\gamma_i e^{(-\gamma_i\tau)}}$$

$$\gamma_i = \sqrt{k_i^2 + 2\sigma_i^2}$$

2.3 风险价格设定形式的选择

本文选择 EAM、EXAM 和 SAM 3种风险价格形式进行比较研究. 主要目的是比较 EXAM和 SAM 的优劣, 而 EAM 的选择则是为了提供一个基准.

为便于比较, 将 3种风险价格设定形式下的风险溢酬写到 1个式子中, 并对参数做一些等价的变换

$$e_{t,x} = \begin{pmatrix} \underline{\lambda_0(1)\sqrt{X_{t,1}}} + \underline{\lambda_1(1)} + \lambda_2(1,1)X_{t,1} + \underline{\underline{\lambda_2(1,2)X_{t,2}}} + \underline{\underline{\lambda_2(1,3)X_{t,3}}} \\ \underline{\lambda_0(2)\sqrt{X_{t,2}}} + \underline{\lambda_1(2)} + \underline{\underline{\lambda_2(2,1)X_{t,1}}} + \lambda_2(2,2)X_{t,2} + \underline{\underline{\lambda_2(2,3)X_{t,3}}} \\ \underline{\lambda_0(3)\sqrt{X_{t,3}}} + \underline{\lambda_1(3)} + \lambda_2(3,1)X_{t,1} + \underline{\underline{\lambda_2(3,2)X_{t,2}}} + \lambda_2(3,3)X_{t,3} \end{pmatrix}$$

其中, 没有下划线的表示 EAM、EXAM 和 SAM 共用的参数, 有一条下划线的代表 SAM 专有的参数, 有两条下划线的代表 EXAM 专有的参数.

为保证状态变量在现实测度下的动态过程有惟一解并恒大于 0, 除施加 $\varphi_i^Q \geqslant 0$, $k_i^Q \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$的参数限制之外, 需要分别对 EAM、EXAM 和 SAM 的参数作以下限制

表 1 参数限制

Table 1 Limits of the parameter estimations

EAM	$k_i^Q - \lambda_2(i,i) \geqslant 0,\ i = 1,2,3;\ \varphi_i^Q \geqslant \frac{1}{2}\sigma_i^2,\ i = 1,2,3$
EXAM	$\lambda_2(i,j) \geqslant 0,\ 1 \leqslant i,j \leqslant 3,\ i \neq j;\ \varphi_i^Q + \lambda_1(i) \geqslant \frac{1}{2}\sigma_i^2,\ i = 1,2,3;$ $(K^P)^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_1^Q + \lambda_1(1) \\ \varphi_2^Q + \lambda_1(2) \\ \varphi_3^Q + \lambda_1(3)\end{pmatrix} \geqslant 0,\ \varphi_i^Q \geqslant \frac{1}{2}\sigma_i^2,\ i = 1,2,3$
SAM	$k_i^Q - \lambda_2(i,i) \geqslant 0,\ i = 1,2,3;\ \varphi_i^Q \geqslant \frac{1}{2}\sigma_i^2,\ i = 1,2,3$

2.4 数据描述

数据来源: Wind数据库, 银行间国债收益率曲线.

相比较信用债而言, 国债收益率代表无风险利率、不受企业信用水平的变化干扰, 能更好地代表利率的动态变化, 同时由于国债成交量大、流动性较好, 因此选择国债收益率曲线数据进行拟合, 能更好地减少由于数据不连续等因素所造成的误差.

时间跨度: 从 2005-01-04至 2008-12-01; 时间间隔: 1星期, 总共 192个星期. 其中, 2005-01-04至 2008-05-05共 163个星期, 2771个数据用于样本期内拟合, 2008-05-06至 2008-12-01日共 29个星期的数据用于样本期外检测.

2.5 估计方法的选择: Kalman Filter

Duffee和 Stanton[14]和 Jong[8]通过比较各种估计方法的有效性后发现, 使用 Kalman Filter是研究仿射模型最有效、误差最小的估计方法. 因此, 本文选择 Kalman Filter法进行估计, 具体估计步骤详见附录.

本文采用最小化残差平方和的方法选择状态

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

变量的初始值

$$\min_{X_0}\sum_{\tau}\left(R_0(\tau)-\left(-\frac{A(\tau)}{\tau}+\left(\frac{B(\tau)}{\tau}\right)'X_0\right)\right)^2$$

$$s\ t\ X_0\geqslant 0$$

$R_0(\tau)$表示在 0时刻、到期日为 τ的连续复利收益率, 单位为百分点.

3 实证结果

3 1 参数估计结果

参数估计结果见表 2

表 2 参数估计结果

Table 2 The results of parameter estimations

参数编号	参数	EAM	SAM	EXAM
1	对数似然值	3 754 275 7	3 765. 483 5	4 943 951 8
2	σ_ε^2	0 067 7	0. 067 4	0 050 9
		(1 044 6)	(0. 001 4)	(0 000 8)
3	φ_1^Q	33 022 9	8. 630 8	2 708 0
		(12 180 8)	(0. 007 0)	(0 001 2)
4	φ_2^Q	0 699 4	0. 671 5	0 267 5
		(0 256 0)	(0. 000 6)	(0 000 5)
5	φ_3^Q	0 024 6	0. 061 8	0 859 0
		(0 049 3)	(0. 000 0)	(0 000 2)
6	k_1^Q	295 429 9	299. 743 5	70 957 4
		(0 127 6)	(0. 007 6)	(0 000 1)
7	k_2^Q	0 000 0	0. 000 0	0 000 1
		(0 999 8)	(0. 000 3)	0 000 0
8	k_3^Q	301 872 3	299. 431 0	0 181 9
		(26 724 8)	(0. 013 1)	0 000 0
9	σ_1	8 126 9	1. 648 8	0 844 7
		(1 768 5)	(0. 001 4)	(0 000 6)
10	σ_2	0 225 8	0. 213 1	0 112 3
		(1 514 0)	(0. 000 7)	(0 000 6)
11	σ_3	0 221 6	0. 126 2	0 705 7
		(1. 2560)	(0. 000 0)	(0 000 7)
12	$\lambda_0(1)$	—	0. 000 5	—
		—	(0. 000 0)	—
13	$\lambda_0(2)$	—	0. 538 6	—
		—	(0. 000 0)	—
14	$\lambda_0(3)$	—	- 0. 156 2	—
		—	(0. 000 0)	—
15	$\lambda_1(1)$	—	—	0 942 6
		—	—	(0 000 3)
16	$\lambda_1(2)$	—	—	- 0 255 3
		—	—	(0 000 3)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

续表 2

Table 2 Continue

参数编号	参数	EAM	SAM	EXAM
17	$\lambda_1(3)$	—	—	−0.580 9
		—	—	(0.000 1)
18	$\lambda_2(1,1)$	293.392 7	299.717 0	−49.039 6
		(0.052 9)	(0.000 0)	(0.000 1)
19	$\lambda_2(2,1)$	—	—	0.808 8
		—	—	(0.000 0)
20	$\lambda_2(3,1)$	—	—	0.210 2
		—	—	(0.000 0)
21	$\lambda_2(1,2)$	—	—	1.819 0
		—	—	(0.000 0)
22	$\lambda_2(2,2)$	−0.386 2	−0.767 3	−1.470 5
		(0.305 0)	(0.001 2)	(0.000 0)
23	$\lambda_2(3,2)$	—	—	0.001 8
		—	—	(0.000 0)
24	$\lambda_2(1,3)$	—	—	0.807 1
		—	—	(0.000 0)
25	$\lambda_2(2,3)$	—	—	2.672 8
		—	—	(0.000 0)
26	$\lambda_2(3,3)$	−299.907 3	−0.007 1	0.171 3
		(0.049 8)	(0.000 0)	(0.000 0)

注: 括号()里是参数的标准误. 此外, 为提高拟合精度, 本文先将收益率数据放大 100倍后再进行参数估计, 故表 1参数所适用的收益率计算公式为 $R_t(\tau) = \left(-\frac{A(\tau)}{\tau} + \left(\frac{\boldsymbol{B}(\tau)}{\tau}\right)\boldsymbol{X}_t\right)/100$

根据表 2给出的估计结果, 可以首先得到如下的一些结论.

首先, 从第 2行的极大似然值看, 总体而言, EXAM对 EAM的改进效果要明显优于 SAM.

其次, 第 3行的 σ_ε^2 代表卡尔曼滤波测量方程的误差方差, 它可以在一定程度上代表横截面收益率曲线形状的拟合效果. 而 EXAM的 σ_ε^2 在 3种模型中是最小的, 这说明 EXAM对模型拟合优度的提高, 部分原因是由于其优化了利率期限结构的横截面拟合效果.

此外, 无论是 SAM还是 EXAM, 它们比 EAM所多出的参数的标准误[②] 1都很小、P值都显著地异于 0 这说明状态变量的风险溢酬, 除了受状态变量自身的波动率影响外, 确实还受到其他因素的影响.

首先从图 2可以看出, EAM和 SAM对短期利率的预测偏误较大, 最大时分别达到 0.2个百分点和 0.15个百分点. 相比较而言, EXAM的预测偏误的稳定性较强, 对不同到期日的利率的预测误差均值一般不超过 0.05个百分点.

3.2 样本期内一阶矩预测误差

从图 3可以看出, EXAM的样本内一阶矩 RMSE要明显小于 SAM和 EAM的. 而 SAM对 EAM的改进则不大.

通过图 2和图 3的分析, 可以得到的结论是: EXAM对样本内利率期限结构一阶矩的拟合程度, 要优于 SAM和 EAM, 即, EXAM更准确地刻画了利率的风险溢酬的动态变化过程.

② SAM比 EAM多出的参数有参数 12, 13, 14, EXAM比 EAM多出的参数有参数 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3 3　样本期外一阶矩预测误差

首先, 通过图 4和图 5发现, EXAM 对样本期外预测效果的改进并没有那么明显, 其预测效果与 EAM 基本类似. 而 SAM 对样本期外的预测误差的波动比较大, 有时优于 EXAM 和 EAM, 有时却比它们糟糕, 从图 5中可以很明显看出这一点.

其次, 3种模型对短端利率的预测都不是很好, 但是相比较而言, 仍然是 EXAM 的 RMSE较低. 此外, 3种模型都对 1至 4年间的利率和长端利率的预测效果较好.

通过以上分析, 可以得到的结论是: 在样本期外, EXAM和 SAM对 EAM的一阶矩预测效果改进效果并不明显, 但总体而言, EXAM 的一阶矩预测效果较为稳定. 从图 6、图 7可以看出, 3种模型都倾向于高估利率的波动率. 而 EXAM 预测二阶矩的效果, 显然要好于其他两种模型, 这一点从图 8、图 9的 RMSE也可以很明显地看出.

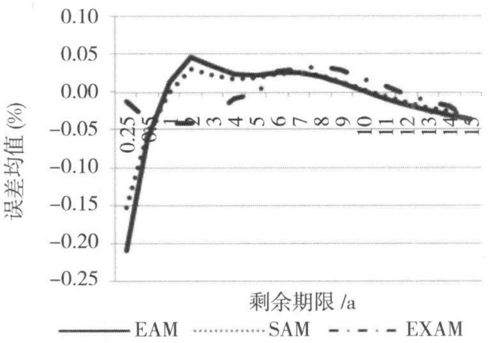

图 2　样本期内一阶矩预测误差均值

Fig. 2 Mean value of in-sample forecast errors of first moment

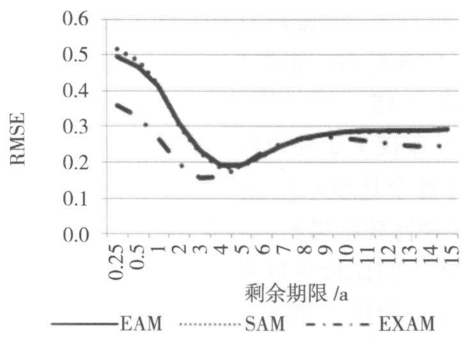

图 3 样本期内一阶矩预测误差 RMSE

Fig. 3 RMSE of in-sample forecast errors of first moment

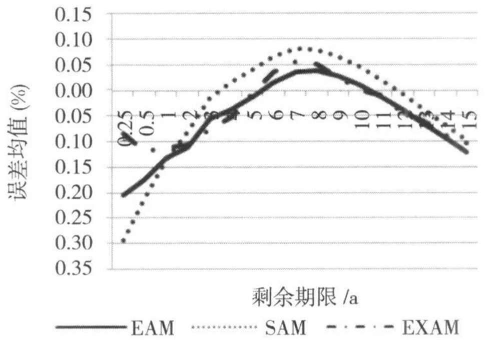

图 4　样本期外一阶矩预测误差均值

Fig. 4 Mean value of out-of-sample forecast errors of first moment

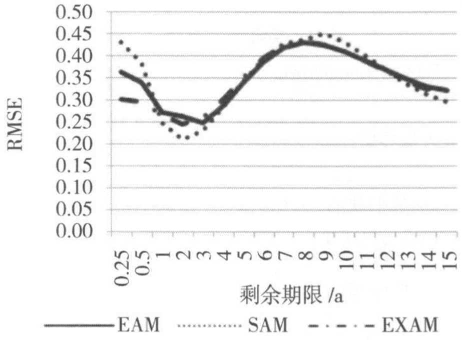

图 5　样本期外一阶矩预测误差 RMSE

Fig. 5 RMSE of out-of-sample forecast errors of first moment

3.4　二阶矩预测误差

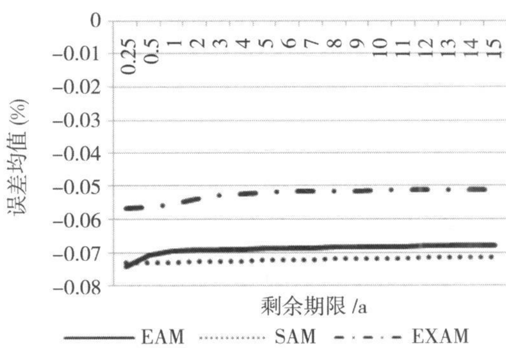

图 6　二阶矩样本期内预测误差均值

Fig 6. Mean value of in-sample forecast errors of second moment

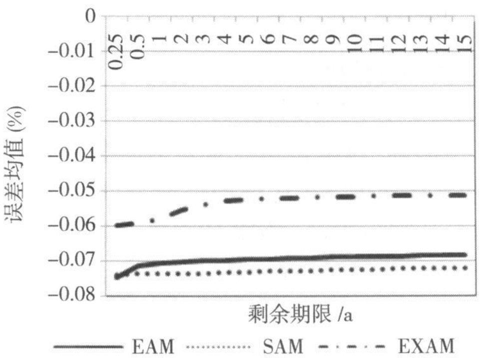

图 7　二阶矩样本期外预测误差均值

Fig7. Mean value of out-of-sample forecast errors of second moment

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

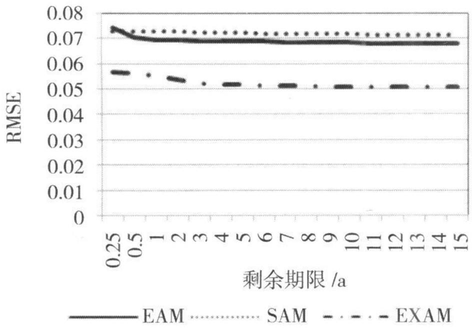

图 8 二阶矩样本内 RMSE

Fig. 8 RMSE of in-sample forecast errors of second moment

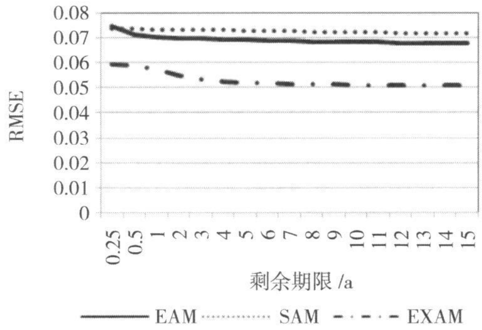

图 9 二阶矩样本外 RMSE

Fig. 9 RMSE of out-of-sample forecast errors of second moment

3.5 总 结

以上比较了 3种风险价格设定的实证结果,这里,将各个比较结果做一个小结.为了方便阅读,将各种比较结果归纳入表 3.

从表 3的比较可以发现, EXAM 在改进利率现实测度一阶矩、二阶矩动态过程拟合的同时,还改进了利率风险中性测度动态过程的拟合.因此, EXAM的风险价格设定形式,在很大程度上要优于 SAM.

表 3 实证结果比较

Table 3 Comparison of the empirical results

极大似然值	EXAM 优于 SAM 优于 EAM
收益率曲线形状的 横截面拟合误差方差	EXAM 优于 SAM 优于 EAM
样本内一阶矩预测 误差	EXAM 优于 SAM 近似于 EAM
样本外一阶矩预测 误差	3种模型 无明显区别
样本内外二阶矩 预测误差	EXAM 优于 EAM 优于 SAM.

3.6 进一步的检验

在看到 EXAM的改善效果的同时,还需要考虑另一个问题:风险价格设定是否诠释了风险溢酬变化的所有内容?其是否完全解决了多因子 CIR模型的问题?为了检测 EXAM 是否考虑了利率期限结构的所有信息以及是否解决了多因子 CIR模型的问题,对以下方程进行样本期内的回归

$$R_{t+\Delta t}(\tau) - E_t(R_{t+\Delta t}(\tau)) = \alpha_\tau + \beta_{1\tau} level_t + \beta_{2\tau} slope_t + \beta_{3\tau} convexity_t + \varepsilon_{t+\Delta t}$$

$$level_t = \frac{R_t(0.5) + R_t(8) + R_t(15)}{3}$$

$$slope_t = R_t(15) - R_t(0.5)$$

$$convexity_t = R_t(0.5) + R_t(15) - 2R_t(8) \tag{11}$$

方程左边表示模型隐含的样本内预测误差.

如果 EXAM 的风险价格设定,考虑了所有的关于收益率曲线形状的信息对风险溢酬变化的影响,那么上述方程中的系数应该是不显著的, P 值应该较大.因此,本文选择了剩余期限为 0.5年、5年和 10年的收益率为代表,分别对上述方程进行回归,其中 Δt指定为 1个星期.

表 4给出了回归的结果.

从表 4发现:首先,无论是哪一种风险价格设定形式,其回归方程的大部分系数都显著不为0③,这说明预测误差仍然与收益率曲线形状的 3个因子之间存在着很显著的关系.因此,虽然发现 EXAM虽然比 SAM和 EAM 的一阶矩预测效果更好,但是在 3因子 CIR模型框架下,其仍然无法完全囊括收益率曲线形状的所有信息.

其次,虽然表 3的结果不令人满意,但它仍然从一个侧面说明了 EXAM确实优于 SAM和 EAM.因为从表 4中的调整 R^2 看,从 EAM 到 SAM再到 EXAM的回归拟合优度存在递减的趋势.

③ Duarte[2] 采用类似的办法比较了 EAM和 semi-affine model,同样发现系数都显著不为 0.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 4　样本内预测误差对 **level, slope**和 **convexity**的回归结果

Table 4 The regression results of in-sample forecast errors regressing on level, slope and convexity

	ESS	SEMI	EXT
$\tau = 0.5$			
修正 R^2	0 860 7	0 865 8	0. 703 5
α_τ	1 591 7 (0 000 0)	1 668 1 (0 000 0)	1. 054 1 (0. 000 0)
$\beta_{1\tau}$	− 16 962 0 (0 000 0)	− 17. 106 4 (0 000 0)	− 18 431 0 (0. 000 0)
$\beta_{2\tau}$	− 46 890 8 (0 000 0)	− 50. 245 9 (0 000 0)	− 11 604 5 (0. 006 6)
$\beta_{3\tau}$	23 365 8 (0 000 0)	23 665 7 (0 000 0)	26. 253 2 (0. 000 0)
$\tau = 5$			
修正 R^2	0 399 6	0 557 1	0. 403 8
α_τ	0 175 1 (0 074 8)	− 0. 293 5 (0 000 5)	0. 057 3 (0. 543 4)
$\beta_{1\tau}$	1 341 0 (0 573 7)	4 333 4 (0 060 4)	9. 266 0 (0. 000 0)
$\beta_{2\tau}$	− 26 494 8 (0 000 0)	− 24. 692 0 (0 000 0)	− 14 890 4 (0. 000 0)
$\beta_{3\tau}$	− 25 888 8 (0 000 0)	− 24. 551 6 (0 000 0)	− 24 076 8 (0. 000 0)
$\tau = 10$			
修正 R^2	0 832 7	0 839 1	0. 778 2
α_τ	− 1 356 1 (0 000 0)	− 1. 384 6 (0 000 0)	− 1 146 2 (0. 000 0)
$\beta_{1\tau}$	30 785 9 (0 000 0)	31 398 4 (0 000 0)	24. 333 3 (0. 000 0)
$\beta_{2\tau}$	7. 783 5 (0 002 3)	9 029 4 (0 001 1)	9. 265 0 (0. 005 7)
$\beta_{3\tau}$	− 20 958 8 (0 000 0)	− 19. 927 9 (0 000 0)	− 19. 562 3 (0. 000 0)

注: 括号 ( ) 里表示 p 值.

4　结束语

利率风险价格, 是连接现实测度和风险中性测度的枢纽. 利率风险价格设定形式的优劣, 会直接影响到模型拟合的准确程度.

本文以三因子 CIR模型为基准, 通过卡尔曼滤波估计, 比较了 EXAM、SAM 和 EAM 3种风险价格对利率变化一阶矩、二阶矩的样本内外的预测效果、以及各自对横截面性质的拟合能力. 实证结果表明, 无论从一阶矩预测、二阶矩预测还是横截面性质的拟合效果上, EXAM 都明显优于 SAM, 而 SAM 对 EAM 的改进则不是很大.

然而, 本文通过一阶矩预测误差对 level、

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

slope和 convexity 3种因子的回归发现, EXAM仍然无法完全解决 EAM的问题, 在多因子 CIR模型框架下, 对二阶矩预测能力的提高, 仍然是以牺牲一阶矩预测能力为代价的. 因此, 通过风险价格设定来改进多因子 CIR模型对利率一阶矩的预测, 仍然需要进一步的深究.

参 考 文 献:

[1] Duffee G R. Term premia and interest rate forecasts in affine models [J]. Journal of Finance, 2002, 57(1): 405 – 443

[2] Duarte J. Evaluating an alternative risk preference in affine term structure models [J]. Review of Financial Studies, 2004, 17(2): 379 – 404

[3] Cheridito P, Filipovic D, Kimmel R L. Market price of risk specifications for affine models: Theory and evidence [J]. Journal of Financial Economics, 2007, 83(1), 123 – 170

[4] Duffie D, Kan R. A yield-factor model of interest rates [J]. Mathematical Finance, 1996, 6(4): 379 – 406.

[5] Fisher M, Gilles C. Estimating Exponential-Affine Models of the Term Structure [R]. New York: Federal Reserve Board, 1996

[6] Chen R R, Scott L. Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates [J]. Journal of Fixed Income, 1993, 3(3): 14 – 31.

[7] Dai Q, Singleton K J. Specification analysis of affine term structure models [J]. Journal of Finance, 2000, 55(5): 1943 – 1978

[8] Jong F D. Time series and cross-section information in affine term-structure models [J]. American Statistical Associaltion Journal of Business & Economic Statistics, 2000, 18(3): 300 – 314

[9] Lamoureux C G, Witte H D. Empirical analysis of the yield curve: The information in the data viewed through the window of cox, ingersoll, and ross [J]. Journal of Finance, 2002, 57(3): 1479 – 1520

[10] Ahn D H, Dittmar R F, Gallant A R. Quadratic term structure models: Theory and evidence [J]. Review of Financial Studies, 2002, 15(1): 243 – 288

[11] Dai Q, Singleton K J. Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure [J]. Journal of Financial Economics, 2002, 563(3): 415 – 441.

[12] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177 – 188.

[13] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates [J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385 – 407.

[14] Duffee G, R. Stanton H. Estimation of Dynamic Term Structure Models [R]. U. C. Berkeley: Haas School of Business, 2004.

[15] Dai Q, Singleton K. Term structure dynamics in theory and reality [J]. Soc Financial Studies, 2003, 16(3): 631 – 678

Empirical research on specification of interest risk price under framework of affine DTSM

ZHENG Zhen-long[1], *KE Hong*[2], *MO Tian-yu*[1]

1. Departent of Finance, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. First Capital Security Company, Shenzhen 518028, China

Abstract There exists four primary specifications of interest risk price under the framework of affine DTSM: Completely affine model (CAM), essentially affine model (EAM), extended affine model (EXAM), semi-affine Model (SAM). It has been proved both in theory and empirical studies that EAM is superior to CAM, and that EXAM and SAM are both superior to EAM. But no theoretical evidence and few empirical studies could

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

help to determine a better model between semi-affine model and extended affine model. So this paper does an empirical comparison on SAM、EXAM and EAM based on the three-factors CIR model and estimation method of kalman filter. The empirical results suggest that EXAM is the best specification of interest risk price. However, the robust test suggests that EXAM is not perfect enough to capture all the information in the term structure of interest rate.

Key words: interest rate affine DTSM; market price of interest risk; extended affine model; semi-affine model

附录

1　漂移项为状态变量线性函数时, 状态变量的条件均值与条件方差

要用卡尔曼滤波进行估计, 首先要计算状态变量的条件均值与条件方差.

假设状态变量的动态过程为

$$dX_t = K(\theta - X_t)dt + \Sigma\sqrt{S_t}dW_t,$$

$$S_t = \alpha + \beta X_t$$

Fisher和 Gilles[6] 给出了 Affine Model下条件均值和条件方差的一般性式子

$$E(X_T \mid X_t) = \varphi(T-t)X_t + D(T-t)K\theta$$

$$Var(X_T \mid X_t) = \int_t^T \varphi(T-s)F(t,s)\varphi(T-s)ds$$

其中

$$F(t,s) = \alpha + \beta E(X_T \mid X_t),$$

$$\varphi(\tau) = e^{(-K\tau)},$$

$$D(\tau) = \int_0^t \varphi(s)ds$$

注意, $e^{(-K\tau)}$ 表示对整个矩阵 $(-K\tau)$ 求 e, 在 Matlab中用 expm命令表示 .

而 Duffee[1] 给出了当 K 可对角化时, 条件均值和条件方差的解析式.

令 $K = NDN^{-1}$, D表示 K的特征值矩阵, $D(i,i) = d_i$, 并定义 $X_t^* = N^{-1}X$, 则 X^* 的动态过程可以表示为

$$dX_t^* = D(\theta^* - X_t^*)dt + \Sigma^*\sqrt{S_t^*}dW_t$$

$$S_t^* = \alpha + \beta^* X_t^*;\ \theta^* = N^{-1}\theta;$$

$$\Sigma^* = N^{-1}\Sigma;\ \beta^* = \beta N$$

通过推导可得④

$$E(X_T \mid X_t) = (1 - e^{(-K(T-t))})\theta + e^{-K(T-t)}X_t,$$

$$Var(X_T \mid X_t) = N\,Var(X_T^* \mid X_t^*)N'$$

$$Var(X_T^* \mid X_t^*) = \{(d_j + d_k)^{-1}G_0(j,k) \times (1 - e^{-(T-t)(d_j+d_k)})\} + \sum_{i=1}^{n}[\theta_i^* \{(d_j+d_k)^{-1}G_i(j,k) \times (1 - e^{-(T-t)(d_j+d_k)})\}] + \sum_{i=1}^{n}[(X_{t,i}^* - \theta_i^*) \times \{(d_j + d_k - d_i)^{-1} \times G_i(j,k) \times (e^{-d_i(T-t)} - e^{-(d_j+d_k)(T-t)})\}]$$

其中

$$G_0 = \Sigma^* \mathrm{diag}(\alpha^*)\Sigma^{*\prime},$$

$$G_i = \Sigma^* \mathrm{diag}(\beta^*(:, i))\Sigma^{*\prime}$$

$\{f(j,k)\}$ 表示第 (j,k) 个元素为 $f(j,k)$ 的矩阵.

2　Semi-Affine Model下, 状态变量的条件均值和条件方差

在 SAM 下, 状态变量在现实测度下的漂移项是非线性的, 无法用前面的方法直接求得条件均值和条件方差的解析式. 因此, 这里采用 Duarte[2] 的方法求近似的条件均值和条件方差. Duarte表明, 当时间间隔小于 1个月时, 这种近似所产生的误差很小, 几乎可以忽略不计.

在 SAM 下, 状态变量的漂移项可以写为

$$\mu(X) = K\theta + \Sigma\sqrt{S}\Sigma^{-1}\lambda_0 - KX,$$

$$S(i,i) = \alpha_i + \beta_i' X$$

$$K = K^Q - \Sigma(\lambda_1(1)\beta_1', \dots, \lambda_1(1)\beta b_n')' - \Sigma\sqrt{S}\sqrt{S^-}\lambda_2$$

$$K\theta = K^Q\theta^Q + \Sigma(\lambda_1(1)\alpha_1', \dots, \lambda_1(1)\alpha_n')$$

对 $\sqrt{\alpha_i + \beta_i' X}$ 做 X_t附近的一阶泰勒展开, 得到

$$\sqrt{\alpha_i + \beta_i' X} \sim \sqrt{\alpha_i + \beta_i' X_t} + \frac{\beta_i'(X - X_t)}{2\sqrt{\alpha_i + \beta_i' X_t}}$$

将泰勒展开近似值代入漂移项, 并合并同类项可得

$$\mu(X) \sim K\theta + \Sigma A(X_t)\Sigma^{-1}\lambda_0 - (KX - \Sigma B(X_t)\Sigma^{-1}\lambda_0)$$

其中, $A(X_t)$、$B(X_t)$ 是对角矩阵, 其对角线元素为

$$A_{i,i}(X_t) = \sqrt{\alpha_i + \beta_i' X_t} + \frac{-\beta_i' X_t}{2\sqrt{\alpha_i + \beta_i' X_t}}$$

$$B_{i,j}(X_t) = \frac{\beta_i' X_t}{2\sqrt{\alpha_i + \beta_i' X_t}}$$

这样, 就可以得到 SAM 非线性漂移项的线性近似, 从而利用这个近似值就可以应用 Fisher和 Gilles[9] 和 Duffee[1] 的方法来求得状态变量的条件均值和条件方差.

(下转第 25页)

④　注意 Duffee[1] 给的 $Var(X_T^* \mid X_t^*)$ 有误, 将式中的某个加号写为乘号了; 而 Duarte给的式子也犯了同样的错误.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Loan pricing model based on stochastic production function and application

SUI Cong, CHI Guo-tai
School of Management, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

Abstract This paper establishes the formula of loan pricing with estimated value of parameters in the stochastic production function. At the same time, it confirms the loan rate when the technical efficiency is optimal and fixes the loan pricing model based on stochastic production function. The features and innovations of this model are: Firstly, this model ascertains the loan rate of new loan on the premise that the technical efficiency is optimal based on the stochastic production function and ensures the optimal technical efficiency of loan pricing and deals with the contradictory problem that the loan pricing not only overlays the cost and risk but also is accepted by clients, which provides a new idea to loan pricing. Secondly, through the loan pricing formula based on stochastic production function, the loan rate of optimal technical efficiency can be fixed and the method that the output is fixed in the stochastic production function can be provided when the technical efficiency is optimal. So this model expands the use of the stochastic production function to fix the outputs when the technical efficiency is assessed by this function. Thirdly, combined with stochastic frontier, the loan pricing model is established based on the stochastic production function. We retrieve all the documentation in China Journal Full-text Database and Elsevier, etc., and find that it is the first loan pricing model to ensure the optimal technical efficiency of loan pricing.

Key words loan pricing; stochastic production function; technical efficiency; stochastic frontier analysis

(上接第 15页)

3 卡尔曼滤波估计步骤

令η表示所有需要估计的参数, 则测量方程可以表示为

$$R_t(\tau,\eta) = -\frac{A(\tau,\eta)}{\tau} + \frac{B(\tau,\eta)}{\tau}X_t + \varepsilon_{t\tau}$$

$\varepsilon_{t\tau}$表示横截面拟合的误差.

卡尔曼方程的迭代步骤为:

1) 用最小化残差平方和的办法求得状态变量的初始值$X_{0|0}$, 并为赋予η可能的值.

2) 计算X_t的条件均值和条件方差

$$X_{t+\Delta t|t} = (I - e^{(-K\Delta t)})\theta + e^{(-K\Delta t)}X_{t|t},$$

$$V_{T|t} = N V^{*}_{T|t} N'$$

3) 计算$Rt(\tau,\eta)$的条件均值和条件方差

$$R_{t+\Delta t|t} = -\frac{A(\tau,\eta)}{\tau} + \frac{B(\tau,\eta)}{\tau}X_{t+\Delta t|t}$$

$$V_{R,t+\Delta t|t} = \left(\frac{B}{\tau}\right)' V_{t+\Delta t|t}\left(\frac{B}{\tau}\right) + \sigma_{\varepsilon}^2$$

4) 计算预测误差

$$e_{t+\Delta t|t} = R_{t+\Delta t} - R_{t+\Delta t|t}$$

5) 用$t=\Delta t$的信息更新状态变量

$$X_{t+\Delta t|t+\Delta t} = X_{t+\Delta t|t} + V_{t+\Delta t|t}\left(\frac{B}{\tau}\right)V^{-1}_{R,t+\Delta t|t}\,e_{t+\Delta t}$$

$$V_{t+\Delta t|t+\Delta t} = V_{t+\Delta t|t} - V_{t+\Delta t|t}\left(\frac{B}{\tau}\right)V^{-1}_{R,t+\Delta t|t}\left(\frac{B}{\tau}\right)'V_{t+\Delta t|t}$$

通过不断迭代 1至 5的步骤, 最终可以求得极大似然值. 极大似然值函数为

$$\text{Log-likelihood} = -\sum_{t=\Delta t}^{T}\left(\log(V_{R,t|t-\Delta t}) + e_t' V^{-1}_{R,t|t-\Delta t}e_t\right)$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net